数理解析研究所講究録
297巻 1977年 92-99

S^3の中のsurfaceについて

東大 理　山崎正之

$g: V \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ を $\mathbb{Z}_2$上の２次形式とすると、gに随伴する双一次形式 (,) が $(x,y) = g(x+y) - g(x) - g(y)$ により定まる。$R = \{x \in V ; (x,y) = 0 \text{ for } \forall y \in V\}$ とおくとき gの Arf invariant が定まるためには $g|R \equiv 0$が必要十分である。([1] p.56 Ⅲ.1.14 Theorem.)

今、S^3の中のlink をひとつとり、そのSeifert surface Mを固定したとき、上のVとして$H_1(M;\mathbb{Z}_2)$、gとして self-linking number (mod 2)、(,)として intersection pairing (mod 2)をとることにする。$g|R \equiv 0$ という条件はこのlinkが proper link ([2] p.546)であるという条件に一致する。従ってlinkがproperのとき、Mに対してArf invariantが定義されるが、これはMのとり方によらずに定まる。

$g|R \not\equiv 0$ならばArf invariantはwell-definedでないという事実を翻訳して次の定理をうる。

定理 (i) $M, M'\ (\in \mathcal{M}_{g,k})$ が S^3 の中の 2つの non-zero type の surface であるとき，M と M' が互いに regularly homotopic であるためには，M と M' が同じ type を持つことが必要十分である．

(ii) $M, M'\ (\in \mathcal{M}_{g,k})$ が S^3 の中の 2つの zero type の surface であるとき，M と M' が互いに regularly homotopic であるためには，M と M' が同じ Arf invariant を持つことが必要十分である。

(但し，$g \geqq 0 \quad k \geqq 1$)

§1 定義

定義1 $\bar{M}$ をジーナス g の2次元向き付け可能閉多様体から k 個の開円板をとりのぞいたものとする。このとき

$$\mathcal{M}_{g,k} \underset{def.}{=} \{\, f(\bar{M}) \subset S^3 \,;\, f : \bar{M} \longrightarrow S^3 : \text{imbedding} \,\}$$

とする。$\mathcal{M}_{g,k}$ の元を surface とよぶ．

定義2 $M \in \mathcal{M}_{g,k}$ ，$\partial M = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_k$ とする。

M が k type の surface であるとは

$$\#\{\, i \,;\, L_M(c_i, c_i) \equiv 1 \pmod 2 \,\} = 2k$$

であることとする．但し $c_i = [\gamma_i] \in H_1(M;\mathbb{Z})$ であり，$L_M(\ ,\ ) : H_1(M;\mathbb{Z}) \otimes H_1(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ は linking pairing である。$\mathbb{Z}_2$ 係数にしたものを $\tilde{L}_M(\ ,\ ) : H_1(M;\mathbb{Z}_2) \otimes H_1(M;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ とか $\tilde{c}_i$ のように $\sim$ をつけてかく。

注意. $\tilde{c}_1 + \cdots + \tilde{c}_k = 0$ であるから

$$\tilde{L}_M(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1) = \tilde{L}_M(\tilde{c}_2 + \cdots + \tilde{c}_k,\ \tilde{c}_2 + \cdots + \tilde{c}_k)$$
$$= \tilde{L}_M(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2) + \cdots + \tilde{L}_M(\tilde{c}_k, \tilde{c}_k)$$

$$\therefore\ \tilde{L}_M(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1) + \tilde{L}_M(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2) + \cdots + \tilde{L}_M(\tilde{c}_k, \tilde{c}_k) = 0$$

従って $\#\{i\,;\, L_M(c_i, c_i) \equiv \tilde{L}_M(\tilde{c}_i, \tilde{c}_i) \equiv 1 \pmod 2\}$ は偶数となり、k は $[\frac{k}{2}]$ 以下の整数である.

定義 3. $M, M' \in \mathcal{M}_{g,k}$ とする. M が M' に *regularly homotopic* とは、
- 普通の意味での *regular homotopy* $H : \bar{M} \times I \longrightarrow S^3$ が存在し
- $H|\bar{M}\times\{0\}$, $H|\bar{M}\times\{1\}$ は *imbedding* になっており
- $H(\bar{M}\times\{0\}) = M \quad H(\bar{M}\times\{1\}) = M'$

であることをいう.

定義 4. *surface* M の Arf *invariant* $a(M)\ (\in \mathbb{Z}_2)$ とは, $q(x) = \tilde{L}_M(x, x)$ によって定まる2次形式 $q : H_1(M\,;\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ の Arf *invariant* のことである.

注意. この場合 $\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_k$ によって生成される $H_1(M\,;\mathbb{Z}_2)$ の部分空間が R であるから、*surface* M の Arf *invariant* が *well-defined* であるための必要十分条件は, M が 0-*type* であること.

§2 定理の証明

補題1. MはM′に *regularly homotopic* であり、HをMとM′の間の *regular homotopy* とする。このとき

$$\tilde{L}_M(\tilde{x}, \tilde{x}) = \tilde{L}_{M'}((h_1 \circ h_0^{-1})_* \tilde{x}, (h_1 \circ h_0^{-1})_* \tilde{x}) \quad \text{for } \forall \tilde{x} \in H_1(M; \mathbb{Z}_2)$$

(但し, $h_0 = H|\bar{M} \times \{0\}$　$h_1 = H|\bar{M} \times \{1\}$)

証明は、この補題が $g=0$, $h=2$ のとき、すなわち M, M′ が S^3 の中の帯になっている時正しいこと([3])を用いれば容易に示される。

補題2 (i) MがM′に *regularly homotopic* とすると、MとM′は同じ *type* を持つ。

(ii) 0-*type* の *surface* M, M′が *regularly homotopic* とすると $a(M) = a(M')$ である。

証明) (i) $\partial M = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_h$　$\partial M' = \gamma_1' \cup \cdots \cup \gamma_h'$ とする。番号を適当につけかえて、$(h_1 \circ h_0^{-1})(\gamma_i) = \gamma_i'$ $(i=1, \cdots, h)$ と仮定してよい。$\tilde{c}_i = [\gamma_i] \in H_1(M; \mathbb{Z}_2)$　$\tilde{c}_i' = [\gamma_i'] \in H_1(M'; \mathbb{Z}_2)$ とすると補題1により、$\tilde{L}_M(\tilde{c}_i, \tilde{c}_i) = \tilde{L}_{M'}(\tilde{c}_i', \tilde{c}_i')$ $(i=1, \cdots, h)$.

従ってMとM′は同じ *type* をもつ。　(q.e.d.)

(ii) $\{\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \cdots, \tilde{a}_g, \tilde{b}_g, \tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_{h-1}\}$ を $H_1(M; \mathbb{Z}_2)$ の *symplectic basis* とする。

$$\tilde{a}_i' = (h_1 \circ h_0^{-1})_* \tilde{a}_i \qquad \tilde{b}_i' = (h_1 \circ h_0^{-1})_* \tilde{b}_i \qquad i=1, \cdots, g$$

$$\tilde{c}_j' = (h_1 \circ h_0^{-1})_* \tilde{c}_j \qquad j=1, \cdots, h-1.$$

とおくと、$\{\tilde{a}_1', \tilde{b}_1', \cdots, \tilde{a}_g', \tilde{b}_g', \tilde{c}_1', \cdots, \tilde{c}_{k-1}'\}$ は $H_1(M'; Z_2)$ の symplectic basis である。補題1により。

$$\tilde{L}_M(\tilde{a}_i, \tilde{a}_i) = \tilde{L}_{M'}(\tilde{a}_i', \tilde{a}_i')$$

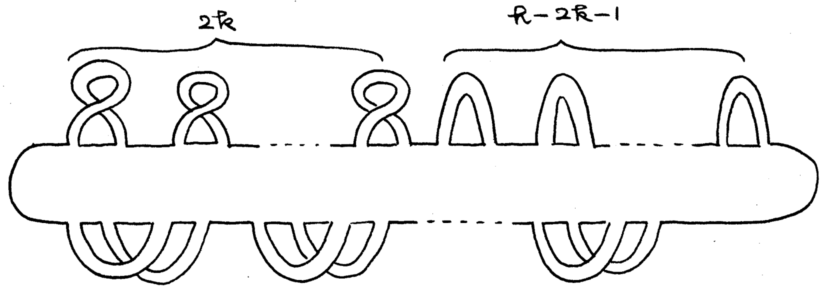
$$\tilde{L}_M(\tilde{b}_i, \tilde{b}_i) = \tilde{L}_{M'}(\tilde{b}_i', \tilde{b}_i')$$

従って
$$\begin{aligned} a(M) &= \sum_{i=1}^{g} \tilde{L}_M(\tilde{a}_i, \tilde{a}_i)\, \tilde{L}_M(\tilde{b}_i, \tilde{b}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{g} \tilde{L}_{M'}(\tilde{a}_i', \tilde{a}_i')\, \tilde{L}_{M'}(\tilde{b}_i', \tilde{b}_i') \\ &= a(M'). \end{aligned}$$
(q.e.d.)

定理の証明.

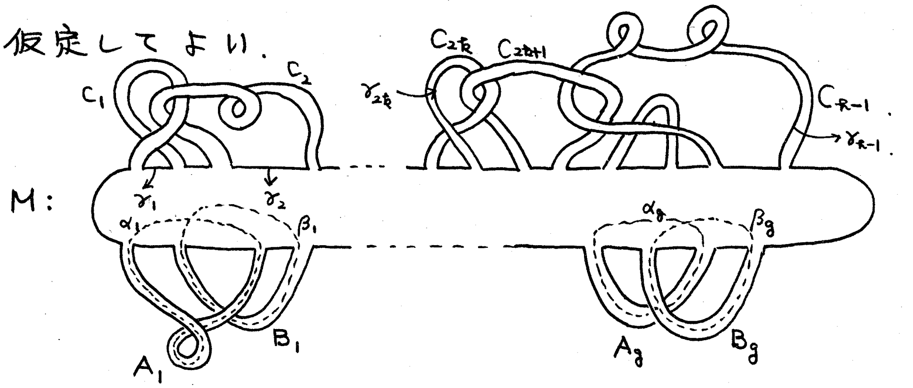
(i) M を k(>0) type の surface とする。$\tilde{M}$ を図のような、標準的な k type の surface とする。M が $\tilde{M}$ に regularly homotopic であることをいえばよい。

$\tilde{M}$:

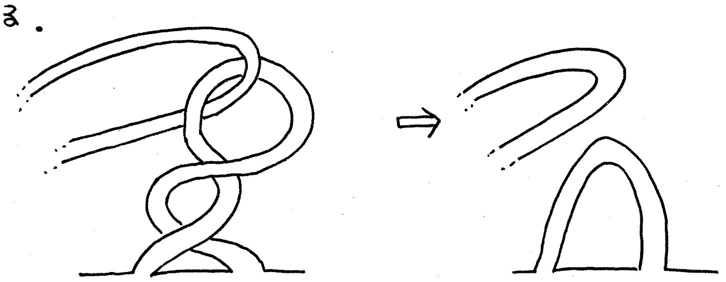


M は disc に帯 $A_1\ B_1 \cdots A_g\ B_g\ C_1 \cdots C_{k-1}$ がついているものとおもうことができる。帯 $A_i(B_i, C_j)$ は曲線 $\alpha_i(\beta_i, \gamma_j)$ $i=1, \cdots, g$ $j=1, \cdots, k-1$ を持つ。$\alpha_i, \beta_i, \gamma_j$ によって表現される $H_1(M; Z)$ の

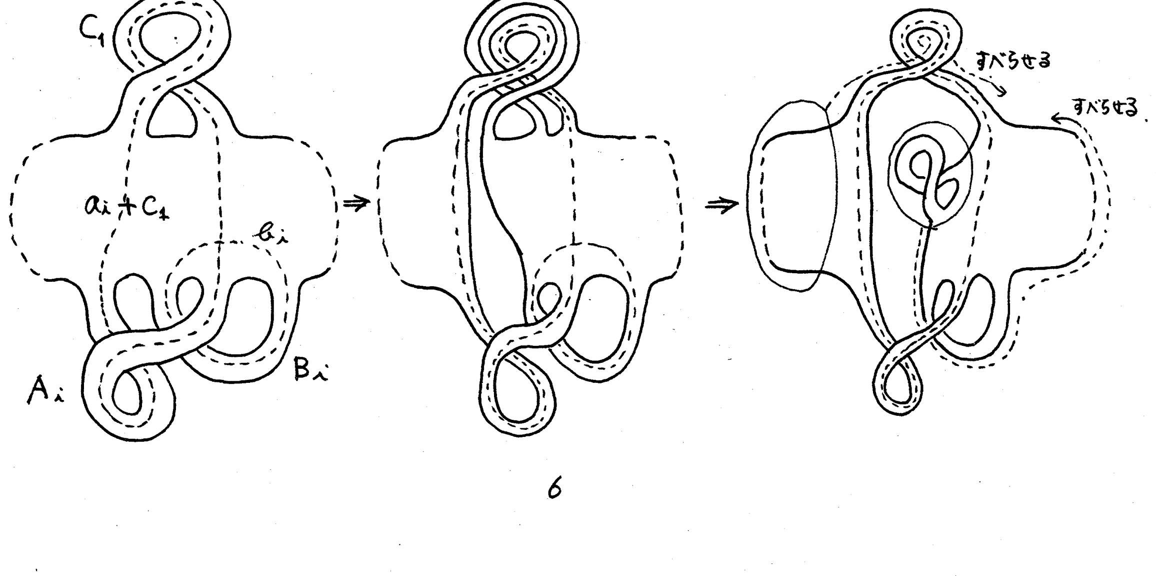
元を a_i, b_i, c_j とかく．$\tilde{M}$ にあわせるために $L_M(c_i, c_i) \equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ 2)$ for $i=1, \cdots, 2k$. $L_M(c_i, c_i) \equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ 2)$ for $i=2k+1, \cdots, k-1$ と仮定してよい．

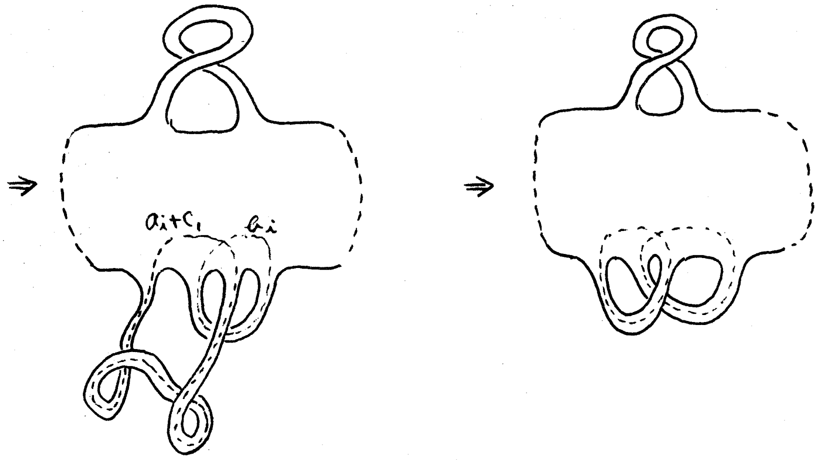


regular homotopy を用いて　からみあっている帯は，はずしていく．またおのおのの帯の self-linking も 0 または 1 にする．



今ある帯 A_i において $L_M(a_i, a_i) = 1$ であったとする．新しい symplectic basis $\{a_1, b_1 \cdots\ a_i + c_1, b_i, \cdots\ a_g, b_g, c_1, \cdots, c_{k-1}\}$ をとり，これに即した帯分解の変更を下図のようにおこなう．





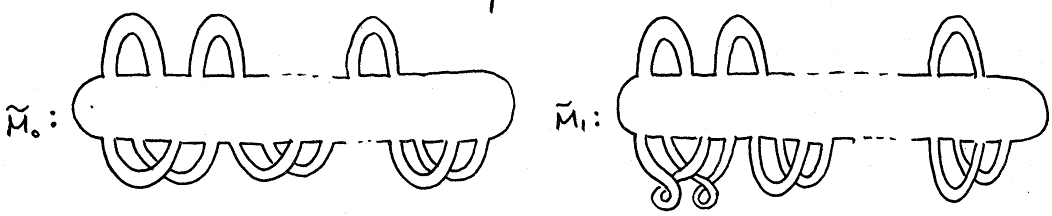
これをくりかえすことによって新しいsurface M'では

$$L_{M'}(a_i, a_i)=0 \qquad L_{M'}(b_i, b_i)=0$$

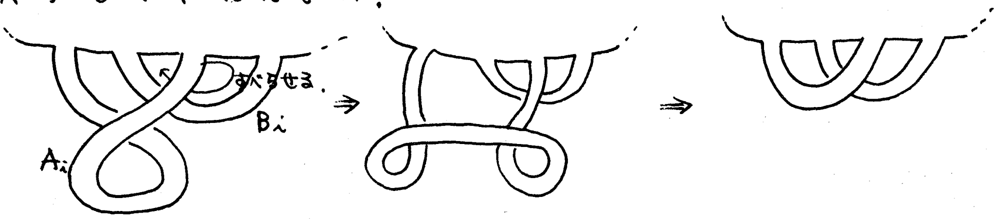
にできる。こうしてできたM'は標準のsurface $\tilde{M}$に isotopic である。

(q.e.d)

(ii) 証明は(i)の場合と全く同様であるが、唯一異なるのは、帯A_i(B_i)のself-linkingを帯C_1のそれで打ち消すことができない点である。標準surface $\tilde{M}_0$, $\tilde{M}_1$は次のとうりとする。



$L_M(a_i, a_i)=1$ $L_M(b_i, b_i)=0$ なるiがある時は、帯A_iをB_iに沿ってすべらせてやればよい。



$L_M(a_i, a_i)=1$　$L_M(b_i, b_i)=1$　$L_M(a_j, a_j)=1$　$L_M(b_j, b_j)=1$

となる i, j $(i \neq j)$ があったときは　a_i, b_i, a_j, b_j のかわりに

$$a'_i = a_i + b_i + a_j + b_j \qquad b'_i = a_i + b_i + b_j$$

$$a'_j = a_i - a_j \qquad b'_j = b_i + a_j$$

として新しい *symplectic basis* をとり．新しい帯分解を行ない (i) と同様にして *surface* M' で

$$L_{M'}(a'_i) = L_{M'}(a'_j) = L_{M'}(b'_i) = L_{M'}(b'_j) = 0$$

他はそのまま

なものをつくる．

これらをくりかえせば、$a(M)=0$ のときは $\widetilde{M}_0$ に、$a(M)=1$ のときは $\widetilde{M}_1$ に *isotopic* な *surface* M'' を得る．(q.e.d.)

注意　$a(M)=0$ (1) は $L_M(a_i, a_i) \equiv L_M(b_i, b_i) \equiv 1 \pmod 2$ なる i が偶数個（奇数個）あることを意味する．

参考

[1] W. Browder : Surgery on Simply-Connected Manifolds ; Springer (1972).

[2] R. A. Robertello : An Invariant of Knot Cobordism. ; Comm. Pure Appl. Math. vol 18 543−555 (1965)

[3] 加藤十吉 : 帯のトポロジー ;数解研講究録 243.（多様体の低余次元位置問題について）88−96 (1975)